

Inženjerska geodezija 2

PREDAVANJE

KONCEPT MERENJA I GREŠAKA MERENJA

dr Milutin Pejović, dipl.geod.inž.

mpejovic@grf.bg.ac.rs

Univerzitet u Beogradu, Građevinski fakultet

Odsek za geodeziju i geoinformatiku

Beograd, 2026.



Šta ćemo učiti u okviru ovog predavanja?

U okviru ovog predavanja naučićete:

- Šta su merene veličine, a šta merenje? Koje merene veličine merimo u Inženjerskoj geodeziji i na koji način?
- Model merenja
- Greške merenja
- Koncept preciznosti i tačnosti

Šta je merena veličina?

- **Merena veličina** – merena veličina je fizička ili geometrijska veličina koja je predmet merenja i koju je moguće izmeriti sa određenim nivoom pouzdanosti (merne nesigurnosti). Zbor različitih uticaja koji utiču na merenje, u slučaju višetrukog merenja merene veličine (npr. dužine od tačke A do tačke B), merena veličina ima svojstva slučajne promenljive i može imati različite vrednosti.
- U geodetskim zadacima, ternim merena veličina koristi se za označavanje pojedinačnih veličina koje su predmet merenja. Na primer, ako se mere dužine **AB, BC, CD i DA**, koje predstavljaju pojedinačne komponente pravougaonika **ABCD**, tada postoje četiri merene veličine: **AB, BC, CD i DA**.

Šta je merena veličina?

Geodetske tehnike

Geometrijski nivelman

Trigonometrijski nivelman

Geodetska mreža (triangulacija)

Merenja žirostaničom / žiroteodolitom

GPS/GNSS merenja

Merene veličine

Visinske razlike između tačaka

Zenitni (ili vertikalni) uglovi, kose (ili horizontalne) dužine, visina instrumenta, visina cilja ili očitavanja na letvi, horizontalni pravci (ili uglovi)

Horizontalni pravci (ili uglovi), vertikalni uglovi (zenitna odstojanja), kose i horizontalne dužine.

Astronomski azimuti (ili smerovi)

Bazni vektori (razlike koordinata između tačaka) i elipsoidne visine

Koncept merenja?

- **Merenje je proces** - Merenje uvek predstavlja fizičku operaciju, a sam proces merenja često se sastoji od više elementarnih operacija, kao što su priprema, postavljanje i podesavanje instrumenta, viziranje...
- **Numeričko očitavanje ili rezultat dobijen iz procesa smatra se merenjem.** Brojčana vrednost dobijena kao rezultat merenja nosi sa sobom i okolnosti i relevantne informacije o načinu na koji je nastala.
- **Merenja se gotovo uvek izvode uz pomoć instrumenata**, bez obzira koliko oni bili jednostavni
- **Merenja se odnose na standarde**, koji su ustanovljeni konvencijom i u izvesnoj meri su proizvoljni. Suštinski, meriti znači **porediti sa standardom**. Zbog toga su u merenju uvek prisutni pojmovi **jedinica i dimenzija**, jer rezultati merenja uvek imaju neku dimenziju.
- Dublje razmatranje merenja pokazuje da se **merenja odnose na teorijske koncepte**, kao što su geometrijske apstrakcije koje koristimo za opisivanje dužina i uglova, a koje nemaju direktan ekvivalent u fizičkoj prirodi. Takve koncepte biramo kako bismo opisali određene elemente prirode, kao što su položaj, površina ili prostorno prostiranje, koji mogu biti od interesa. Iako je izvođenje merenja fizička operacija ili proces, **rezultati dobijeni tim procesom dobijaju značenje merenja tek kada se povežu sa teorijskim konceptima** na koje se odnose i na kojima su zasnovani.

Šta je merenje, a šta merena veličina?

Merenje je poređenje između nepoznate veličine i unapred definisanog standarda, određeno nekim mernim uređajem. Svaka izmerena vrednost je aproksimacija tačne ili stvarne vrednosti, a ne tačna vrednost sama po sebi.

— Crandall i Seabloom (1970)

Direktna i indirektna merenja?

Direktna merenje

Merenja se vrše neposredno nad traženom veličinom.

☞ Primeri: - merenje dužine pantljkikom - elektronsko merenje rastojanja (EDM) - merenje ugla teodolitom ili totalnom stanicom

Indirektna merenja

Ne vrše se direktno nad traženom veličinom, već nad veličinama koje su s njom povezane.

☞ Primeri: - Indirektno određivanje rastojanja između dve tačke; Određivanje visinske razlike diferencijalnim trigonometrijskim nivelmanom.

Model merenja

Model merenja je matematički model koji opisuje kako su merenja povezana sa stvarnim (nepoznatim) veličinama koje su predmet proučavanja (analize). Model merenja predstavlja matematičku konceptualnu formulu pomoću kojeg se opisuje neka merena veličina (a time i rezultat merenja) u odnosu na veličine (parametre) koji su predmet proučavanja ili analize. Takav opis ne mora nužno biti potpun ili iscrpan, već se odnosi samo na one aspekte ili osobine koje su predmet razmatranja. Prema tome, kako model služi određenoj svrsi, njegov oblik može se značajno razlikovati u zavisnosti od posmatranog stanovišta. Tako se isti fizički sistem može opisati pomoću više različitih modela.

U svim slučajevima imamo opšti oblik:

$$l = f(x) + \varepsilon$$

- l - merenje
- $f(x)$ - funkcionalni deo modela ; (x) – Parametri modela(najčešće koordinate)
- ε – Stohastički deo modela

Model merenja – funkcionalni model

Funkcionalni model – funkcionalni model je matematička formulacija odnosa merenja i parametara modela. Kako se geodetskim merenjima uglavnom određuju geometrijske relacije u prostoru u cilju određivanje drugih geometrijskih elememata, parametri modela su najčešće koordinate tačaka kojima se, kroz različite formulacije opisuju geodetska merenja. Funkcionalnim modelom može se smatrati i sistem jednačina kojima se opisuje skup merenja tako da zadovoljavaju određene geometrijske uslove. Geodetska merenja se obično vrše kako bi se procenile vrednosti nekih ili svih parametara funkcionalnog modela.

Model merenja - Primeri

Merenje: dužina između tačaka A i B

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2}$$

$$d_{AB} = \sqrt{(X_B - X_A)^2 + (Y_B - Y_A)^2 + (Z_B - Z_A)^2}$$

GNSS bazni vector

Merenje razlika koordinata između tačaka A i B

$$\Delta X = X_B - X_A, \Delta Y = Y_B - Y_A, \Delta Z = Z_B - Z_A$$

Merenje: pravac iz tačke A ka tački B

$$\alpha_{AB} = \arctan\left(\frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A}\right) + z$$

Merenje: visinska razlika između A i B

$$\Delta H_{AB} = H_B - H_A$$

☞ Navedeni primeri funkcionalnih modela merenja su dobro poznati i logični. Kako se geodetska merenja oni opisuju vezu između merene veličine i parametara modela koji su cilj analize. U navedenim slučajevima to su koordinate tačaka. Međutim, navedeni modeli mogu uključivati i druge parametre, ukoliko se utvrdi da su neophodni da bi se proces merenja, odnosno da bi se uticaj drugih veličina na rezultate merenja, opisao verodostojno. Na primer, ako je tokom merenja prisutan neki sistematski uticaj koji koriguje svaki rezultat merenja prema određenom zakonu (formuli), funkcionalni model može biti proširen.

☞ Sa druge strane, funkcionalni model može biti i drugačije formulisan ukoliko predmet analize nisu geometrijski odnosi. U tom smislu opisivanje rezultata merenja u funkciji od koordinata nema smisla. Na primer, elektronsko merenje dužina u stvari predstavlja merenje vremena ili vremenskih razlika, a ne dužina. Ovde se uključuje znatno više teorije koja mora biti ugrađena u model kada se merenja povezuju sa modelom.

Model merenja – stohastički model

Stohastički model –merenja su uvek pod uticajem određenih nepredvidivih faktora. Ona mogu biti podložna fizičkim uticajima koji se ne mogu u potpunosti kontrolisati, što dovodi do određene promenljivosti rezultata kada se merenja ponavljaju. Promenljivost rezultata merenja može, ali i ne mora, biti pripisana nekim jasno određenim fizičkim uzrocima. Takve statističke varijacije, bilo da nastaju zbog zanemarivanja fizičkih ili vremenski zavisnih uticaja ili zbog inherentnih osobina fizičkih procesa, predstavljaju osnovnu karakteristiku merenja.

Sa praktične tačke gledišta prilično je teško proceniti statističke osobine merenja. Jedan način jeste da se izvrše ponovljena merenja i iz njih odrede potrebne statističke karakteristike, ali je to obično zahtevno. Drugi način, koji se često koristi, jeste da se statističke osobine pretpostave na osnovu opšteg iskustva sa sličnim merenjima koja su u prošlosti izvršena u sličnim uslovima. Zbog toga je, kada se vrše merenja, potrebno zabeležiti sve relevantne fizičke i okolinske uslove tokom perioda merenja kako bi se rezultati mogli pravilno proceniti.

U praksi se često prihvataju prilično grube aproksimacije statističkih osobina opažanja. Na primer, u geodeziji se opažanja obično smatraju **statistički nezavisnim** i često **jednake preciznosti (težine)**.

Matematički formulisane pretpostavke o statističkim osobinama merenja naziva se **stohastički model**.

Klasifikacija grešaka merenja

Kada se neka veličina meri više puta, dobijene vrednosti (opažanja) neće biti iste zbog određenih izvora grešaka koji mogu biti fizičke prirode, vremenski zavisni ili nepoznati. Uticaji takvih izvora grešaka u opažanjima dele se na tri tipa: **slučajne greške, sistematske greške i grube greške.**

Grube greške (greške u radu): Pogrešna očitavanja, beleženja i slične greške

Uzrok: loša tehnika i/ili nepažnja

✓ Mogu se eliminisati pravilnim radom i znanjem o opremi

Sistematske greške: Prate određeni zakon, poznat ili nepoznat, i zavise od lokalnih uslova i/ili opreme. Sistematske greške mogu biti i konstantne (u nekim klasifikacijama grešaka konstatne greške se klasifikuju kao zasebna kategorija, dok su u drugim klasifikacijama te greške svrstane kao specijalni slučaj sistematskih grešaka.)

Primer: ako se pri EDM merenju ne uzmu u obzir temperatura i pritisak, greška nastaje jer brzina EM talasa kroz atmosferu zavisi od tih uslova.

✓ Moguće ih je eliminisati uvođenjem korekcija merenja.

Slučajne greške (nasumične): Slučajne greške su uvek prisutne u merenjima i ne mogu se otkloniti u potpunosti. One predstavljaju **sumarni** negativni uticaj više faktora koji su prisutni tokom procesa merenja, kao što su: nesavršenost instrumenata, ograničenja operatera, promenljivi uslovi okoline. Na osnovu iskustva formulisana su **tri aksioma slučajnih grešaka**:

- Male greške se javljaju češće od velikih
- Pozitivne i negativne greške iste veličine su podjednako verovatne
- Veoma velike slučajne greške se ne pojavljuju

Merna nesigurnost – istinite i najverovatnije vrednosti – pouzdanost merenja

Nijedno merenje nije potpuno tačno. Merenje predstavlja procenu tačne vrednosti merene veličine uvećanu za **mernu nesigurnost**. Merna nesigurnost predstavlja meru kvaliteta merenja uzimajući u obzir i sistematske i slučajne greške. Ona predstavlja meru toga koliko verujemo da poznajemo stvarnu vrednost opservable. Nesigurnost merenja predstavlja sumnju koju imamo u pogledu ispravnosti rezultata merenja. Međutim, mera nesigurnosti nije namenjena da obuhvati sistematske i grube greške.

Svaka merena veličina ima:

- **Istinitu vrednost** – istinita vrednost merene veličine je uvek nepoznata. Obično se označava sa „ μ “.
- **Najverovatniju vrednost** – Najverovatnija vrednost merene veličine predstavlja procenu istinite vrednosti na osnovu rezultata merenja (x_k) (engl. *best estimate*)

U svim vrstama geodetskih merenja uvek se teži otkrivanju i eliminisanju grešaka u terenskom radu, a **stepen u kome je geodetski rad u stanju da to učini predstavlja meru njegove pouzdanosti**. **Nepouzdana merenja** su ona koja mogu sadržati grube greške a da posmatrač toga nije svestan, dok su **pouzdana posmatranja** ona merenja koja su obuhvaćena procedurama i metodologijom koje služe za otkrivanje grubih grešaka.

Greške – korekcije - reziduali

Istinita greška – Istinita greška se definiše kao razlika između istinite i izmerene vrednosti:

$$\delta_k = x_k - \mu$$

Usled nepoznavanja istinite vrednosti merene veličine, istinita greška ostaje takođe nepoznata.

Prividna ili pojavna greška – Ako sa $\bar{x}$ označimo najverovatniju vrednost, razlika između najverovatnije i izmerene vrednosti naziva se korekcija ili rezidual (eng. **residual**). Prividna ili pojavna greška ima istu vrednost kao rezidual, samo suprotan znak:

Korekcija ili Rezidual

$$v_k = \bar{x} - x_k$$

Prividna ili pojavna greška

$$\varepsilon_k = x_k - \bar{x}$$

merenje + rezidual = najverovatnija vrednost

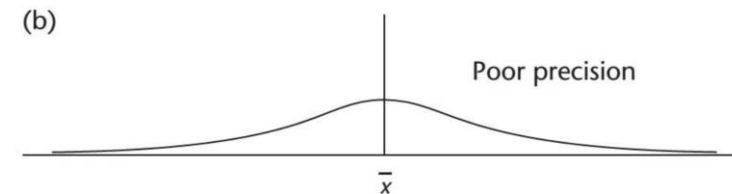
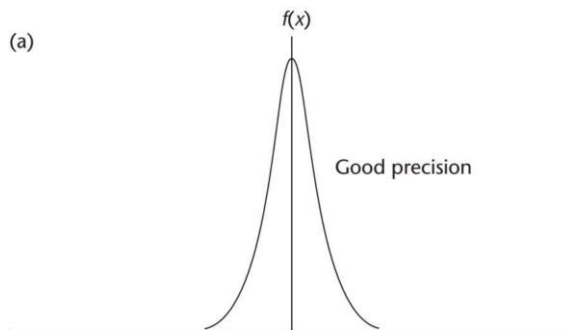
merenje – najverovatnija vrednost = prividna greška

merenje – istinska vrednost = istinita greška

Opšti cilj geodete je da izvrši merenja koja su i **precizna** i **tačna**. Opšte je poznato da su fizička merenja dobijena u procesu geodetskog premera ispravna samo u određenim granicama zbog postojanja slučajnih i sistematskih grešaka. Preciznost i tačnost merenja direktno su povezane sa slučajnim i sistematskim greškama. Pojmovi preciznost i tačnost često se u geodeziji koriste kao sinonimi, ali oni zapravo nisu potpuno isti.

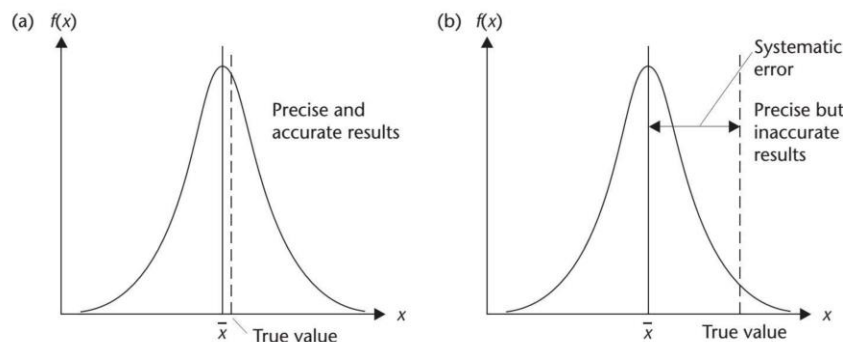
Pojmovi *preciznost* i *tačnost* često se koriste u inženjerskoj geodeziji, kako od strane proizvođača prilikom navođenja specifikacija za svoju opremu, tako i na terenu od strane geodeta i inženjera kada opisuju koliko je njihovo terensko merenje kvalitetno.

Preciznost (ili prividna tačnost) predstavlja stepen međusobne saglasnosti pojedinačnih merenja, odnosno ponovljivost očitavanja. Preciznost se povećava kada se slučajne greške smanjuju, a smanjuje se kada se slučajne greške povećavaju; zato se preciznost smatra merom veličine slučajnih grešaka prisutnih u merenju. Visoka preciznost se postiže kada je skup rezultata merenja “zbijen” oko neke vrednosti, sa malim odstupanjima od uzorka najverovatnije vrednosti, i ima normalnu raspodelu kao na slici levo. Suprotno tome, skup posmatranja koji je široko rasprostranjen i ima slabu preciznost imaće normalnu raspodelu kao na slici desno.

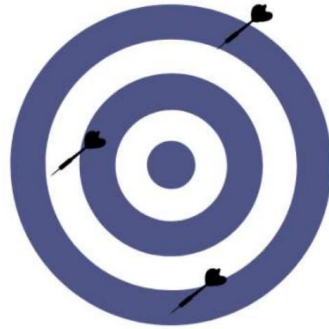


Tačnost (accuracy) predstavlja stepen bliskosti merenja istinitoj vrednosti merene veličine. Tačnost je mera ukupnog uticaja sistematskih i slučajnih grešaka prisutnih u merenju. Teorijski, istinita vrednost merene veličine postoji, ali se ne može tačno odrediti na osnovu merenja zbog grešaka i varijacija u standardima i sistemima koji se koriste za merenje. Zbog toga, uvodi se pojam referentne vrednosti. Međutim, ukoliko merenja zadovoljavaju određeni teorijski geometrijski uslov (na primer zbir uglova u trouglu = 180°), ta vrednost se može smatrati tačnom.

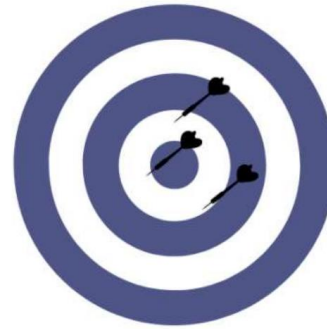
Da bi skup merenja bio smatran tačnim, najverovatnija vrednost ili srednja vrednost uzorka mora biti bliska stvarnoj vrednosti, kao što je prikazano na slici (levo). Moguće je da skup rezultata bude precizan, ali netačan, kao na slici (desno), gde je razlika između stvarne vrednosti i najverovatnije vrednosti velika, verovatno zbog prisustva jedne ili više sistematskih grešaka. Budući da su tačnost i preciznost iste kada se sve sistematske greške uklone, preciznost se ponekad naziva i **tačnost** ili **interna tačnost**.



Preciznost i tačnost



✗ low accuracy
✗ low precision



✓ high accuracy
✗ low precision



✗ low accuracy
✓ high precision



✓ high accuracy
✓ high precision

Relativna preciznost

Za mnoga geodetska merenja koristi se izraz **relativna preciznost**, koji predstavlja odnos preciznosti merenja prema samom merenju. Na primer, ako je preciznost merenja rastojanja (d) jednaka (s_d), relativna preciznost se izražava kao:

$$\text{Relativna preciznost} = \frac{s_d}{d} \text{ (npr. 1 prema 5000)}$$

Relativna preciznost se može iskazati i u delovima po milionu (ppm), što je isto kao preciznost od 1 mm po kilometru. Obe ove metode se koriste kod merenja rastojanja totalnim stanicama, kao i pri navođenju tačnosti GNSS vektora (baznih linija).

Veoma često, zahtevi (kriterijumi) koji se definišu za realizaciju određenih pozicija su dati u obliku relativne preciznosti. Na primer, kod linijskih objekata za koje se propisuje visoka tačnost (preciznost), kao što su pruge ili vodovi u vertikalnom smislu, zahtevi tačnosti su dati u obliku relativne preciznosti.

Hvala na pažnji!